

**Penjanaan Permukaan Berparameter  
Menggunakan Pendekatan Persamaan Pembeza Separa  
(*Parametric Surface Generation  
Using Partial Differential Equation Based Approach*)**

<sup>1</sup>Shahrul Nizam Ishak & <sup>2</sup>Jamaludin Md Ali

<sup>1,2</sup> Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 Penang  
e-mail: <sup>1</sup>shahrul.usm@gmail.com, <sup>2</sup>jamaluma@cs.usm.my

**Abstrak** Objektif utama kertas kerja ini adalah untuk menunjukkan suatu bentuk permukaan berparameter yang baru dapat dihasilkan dengan kehadiran fungsi sinus pada syarat sempadannya. Kerja yang ditunjukkan di sini menggunakan persamaan *biharmonic* berdarjah empat dengan kaedah penyelesaian persamaan pembeza separa Bloor-Wilson. Seterusnya, satu contoh pasu berlekuk diilustrasikan.

**Katakunci** Persamaan Pembezaan Separa; permukaan Berparameter; pasu berlekuk.

**Abstract** *The main objective of this paper is to present a new parametric surface generation by introducing the sine function to the boundary condition. The work present here utilises the biharmonic equation of order four with the Bloor-Wilson PDE as the solution. Thus, to demonstrate it, an example of dint vase is illustrated.*

**Keywords** *Partial differential equation; parametric Surface; dint vase.*

## 1 Pengenalan

Suatu keperluan yang penting dalam sistem rekabentuk geometri tiga-matra (3D) adalah untuk memudahkan dan menghasilkan ciptaan yang tepat pada suatu permukaan bentuk bebas. Pelbagai teknik rekabentuk geometri telah diperkenalkan. Antaranya adalah permukaan tersirat [5], skim model spline seperti Bezier [8], Splin-B [2], NURBS [6] dan teknik pembahagian kecil. Kedua-dua kaedah spline dan teknik pembahagian kecil adalah yang paling popular dan telah biasa digunakan khususnya.

Jadi, sebagai bandingan kepada teknik rekabentuk geometri di atas, kaedah yang akan dibincangkan di sini adalah dengan menggunakan penyelesaian suatu persamaan pembezaan separa berbentuk eliptik. Merujuk kepada kerja yang telah dilakukan oleh [7] dan [10], kami cuba melanjutkan kajian tersebut dengan mengenalkan satu fungsi pada komponen- $z$  terhadap syarat sempadan baru untuk penjanaan sebuah pasu yang mempunyai lekuk pada bahagian atasnya.

Hasil kerja yang dibincangkan pada kertas kerja ini adalah berkisar tentang kerja yang telah dirintis oleh Bloor-Wilson pada tahun 1989 yang menggunakan kaedah persamaan pembeza separa (PPS) dalam penjanaan permukaan adunan [1]. Pendekatan yang kami gunakan adalah dengan mengambil nilai sempadan di mana suatu permukaan itu disifatkan dengan mentakrifkan suatu ruang lengkung bernombor (dengan gabungan terbitannya) bagi

membentuk hujung permukaan tersebut dan permukaan itu dijana antara lengkung tersebut menggunakan penyelesaian PPS. Pemilihan PPS biasanya bagi darjah rendah seperti persamaan *biharmonic*. Kajian ini tertumpu kepada PPS berdarjah empat sahaja. Oleh itu, kertas kerja ini juga akan menunjukkan satu metodologi yang membincangkan bagaimana persamaan *biharmonic* yang asal berasaskan model PPS Bloor-Wilson dapat diadaptasikan.

Kertas kerja ini telah disusun seperti berikut. Bahagian 2 memberi gambaran awal tentang permukaan berparameter dan sifat-sifatnya. Kemudian, penerangan mengenai kaedah PPS dalam konteks persamaan *biharmonic* berdarjah empat yang berasaskan model PPS Bloor-Wilson dinyatakan pada bahagian 3. Pada Bahagian 4 pula, perbincangan berkisar tentang teknik penyelesaian secara analisis yang dapat digunakan untuk menjana suatu permukaan bentuk bebas seperti pasu. Seterusnya perincian dibuat dengan menunjukkan contoh dan kesan faktor yang mempengaruhi suatu rekabentuk tersebut pada bahagian 5. Kesimpulan terhadap kerja ini akan diberikan pada bahagian 6.

## 2 Gambaran Permukaan Berparameter

Sepertimana lengkung, kita juga dapat takrifkan suatu permukaan itu secara berparameter. Jika kita ambil parameter  $u$  dan  $v$  sebagai contoh, maka suatu permukaan itu dapat ditakrifkan sebagai satu fungsi nilai vektor  $X = X(u, v)$  di mana

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Oleh itu, suatu permukaan tersebut diberi dengan koordinat cartesian sebagai fungsi kepada dua parameter itu iaitu  $u$  dan  $v$  di mana dijelaskan pada suatu julat tertutup yang tertentu:

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad v_1 \leq v \leq v_2.$$

Berdasarkan pernyataan di atas, kita dapat lihat bahawa permukaan tersebut boleh dianggap sebagai memetakannya daripada domain bersegi empat tepat dalam  $(u, v)$  pada satah parameter  $\mathbb{R}^2$  kepada permukaan tampalan dalam  $\mathbb{E}^3$ . Ini dapat dinyatakan sebagai suatu elemen permukaan yang mana ianya boleh menjana permukaan yang lebih kompleks. Satu contoh permukaan berparameter yang dinyatakan oleh permukaan tampalan kubik Ferguson [9] dapat ditakrifkan sebagai

$$X(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} u^i v^j, \quad (1)$$

dengan  $a_{ij} = \langle x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \rangle$  adalah titik kawalan pada permukaan dan  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ .

Terdapat beberapa sifat pada suatu permukaan berparameter yang merupakan asas penting untuk membolehkannya menjana semua bentuk permukaan. Antaranya adalah:

- Koordinat garis lengkung pada suatu permukaan
- Koordinat vektor pada suatu permukaan
- Garis sentuh satah dan vektor normal

### 3 Kaedah PPS untuk Janaan Permukaan

Permukaan PPS ialah satu permukaan tampalan berparameter  $X(u, v)$  yang ditakrifkan oleh suatu fungsi berparameter  $u$  dan  $v$  yang berada dalam domain terbatas  $\Omega \subset R^2$  dengan menentukan data sempadan di sekeliling hujung kawasan  $\partial\Omega$ . Tipikalnya data sempadan ditentukan dalam bentuk  $X(u, v)$  dan beberapa terbitannya pada  $\partial\Omega$ . Tumpuan di sini adalah pada titik koordinat  $u$  dan  $v$  yang dipetakan daripada titik tersebut dalam  $\Omega$  kepada titik pada suatu ruang fizikal.

PPS yang selalu dan meluas digunakan adalah berdasarkan persamaan *Biharmonic* seperti berikut:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)^2 X(u, v) = 0. \quad (2)$$

Ini adalah syarat sempadan pada fungsi  $X(u, v)$  dan terbitan normalnya  $\partial X / \partial n$  dikenakan pada hujung permukaan tampalan tersebut. Dengan menggunakan formulasi ini, kita dapat lihat bahawa operator pembezaan separa bereliptik dalam persamaan (2) mewakili proses pelincinan yang mana nilai pada fungsi tersebut bagi sebarang titik terhadap permukaannya adalah pemberat keseluruhan bagi nilai-nilai sekitarnya. Maka, melalui cara ini didapati suatu permukaan itu mengalami perubahan yang licin disebabkan pemilihan set syarat sempadannya. Diketahui bahawa parameter  $a$  adalah parameter rekabentuk khas yang mana ia mengawal tahap kelicinan suatu permukaan dalam arah  $u$  dan  $v$  [3].

Sepertimana yang telah dibincangkan, suatu permukaan adalah dinyatakan sebagai satu fungsi berparameter  $X(u, v)$ . Oleh itu, bagi membolehkan kita menggunakan kaedah penyelesaian secara analitik, kita anggapkan ruang berparameter  $\Omega$  adalah terbatas dalam domain  $\{u, v : 0 \leq u \leq 1 ; 0 \leq v \leq 2\pi\}$  supaya hasil tampalan permukaan tersebut adalah berkala. Oleh itu, penyelesaian terhadap persamaan (2) dapat dicari menggunakan syarat-syarat sempadan dalam bentuk berikut:

$$X(0, v) = s_0(v), \quad (3)$$

$$X(1, v) = s_1(v), \quad (4)$$

$$X_u(0, v) = t_0(v), \quad (5)$$

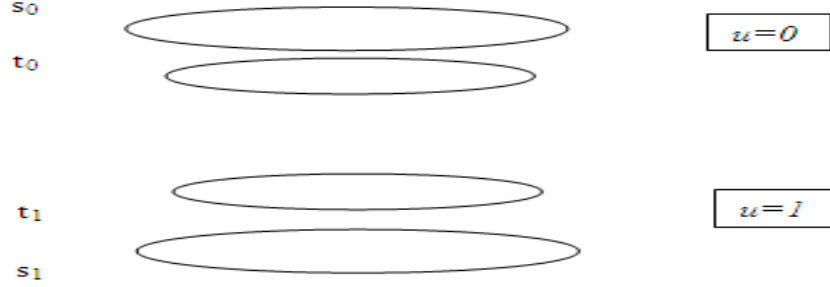
$$X_u(1, v) = t_1(v). \quad (6)$$

Syarat-syarat sempadan  $s_0(v)$ ,  $s_1(v)$  mentakrifkan suatu hujung permukaan tampalan tersebut pada  $u = 0$  dan  $u = 1$  masing-masing manakala syarat-syarat terbitan  $t_0(v)$ ,  $t_1(v)$  adalah ditentukan daripada permukaan normalnya yang serupa dan berhubungkait dengan syarat-syarat sempadan permukaan tersebut juga pada  $u = 0$  dan  $u = 1$  masing-masing. Rajah 1 menunjukkan dengan jelas maksud kedudukan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat terbitannya.

Tumpuan bahawa arah vektor terbitannya adalah daripada lengkung syarat terbitan menghala ke arah lengkung syarat sempadannya. Kaedah bagi menentukan syarat-syarat terbitan dengan lebih terperinci boleh dirujuk dalam [11].

### 4 Penyelesaian Secara Analitikal terhadap PPS

Diberi set syarat sempadan ditakrifkan seperti dalam persamaan (3), (4), (5) dan (6) dengan  $(u, v)$  sebagai ruang parameter  $\Omega$  bagi kawasan  $\{u, v : 0 \leq u \leq 1 ; 0 \leq v \leq 2\pi\}$ .



Rajah 1: Ilustrasi Kedudukan Syarat Sempadan dan Syarat Terbitan pada  $u = 0$  dan  $u = 1$

Maka, semua syarat sempadan adalah selanjur dan tertutup iaitu  $s_0(0) = s_1(2\pi)$  dan  $t_0(0) = t_1(2\pi)$ . Menggunakan kaedah pemisah pembolehubah terhadap persamaan *biharmonic* seperti dalam (2), penyelesaian secara analitik dapat ditulis sebagai

$$X(u, v) = A_0(u) + \sum_{n=1}^N [A_n(u) \cos(nv) + B_n(u) \sin(nv)], \quad (7)$$

dengan

$$A_0(u) = a_{00} + a_{01}u + a_{02}u^2 + a_{03}u^3 \quad (8)$$

$$A_n(u) = a_{n0}e^{anu} + a_{n1}ue^{anu} + a_{n2}e^{-anu} + a_{n3}ue^{-anu} \quad (9)$$

$$B_n(u) = b_{n0}e^{anu} + b_{n1}ue^{anu} + b_{n2}e^{-anu} + b_{n3}ue^{-anu} \quad (10)$$

di mana  $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, b_{n0}, b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}$  adalah nilai vektor malar yang mana nilai-nilai tersebut ditentukan dengan mengenakan syarat sempadan pada  $u$  dengan julat  $0 \leq u \leq 1$ .

Maka, pemilihan syarat-syarat sempadan semuanya adalah fungsi malar yang mana berkala pada  $v$  dan kita dapat menulis siri Fouriernya sebagai

$$s_0(v) = c_0^0 + \sum_{n=1}^N [c_n^0 \cos(nv) + d_n^0 \sin(nv)] \quad (11)$$

$$s_1(v) = c_0^1 + \sum_{n=1}^N [c_n^1 \cos(nv) + d_n^1 \sin(nv)] \quad (12)$$

$$t_0(v) = c_0^2 + \sum_{n=1}^N [c_n^2 \cos(nv) + d_n^2 \sin(nv)] \quad (13)$$

$$t_1(v) = c_0^3 + \sum_{n=1}^N [c_n^3 \cos(nv) + d_n^3 \sin(nv)]. \quad (14)$$

Hasil tambah Fourier dalam ungkapan (11), (12), (13) dan (14) mempunyai mod  $N$  yang terbatas. Pemilihan  $N$  dengan jelas akan memberi kesan terhadap tahap penghampiran

kepada penyelesaian bagi persamaan (7) sama ada baik atau buruk bergantung pada syarat-syarat sempadan yang dipilih. Maka, pemangkasan terhadap siri Fourier tersebut adalah terbatas pada beberapa nilai mod  $N$  sahaja dan biasanya  $N \leq 6$ . Maklumat lanjut boleh dirujuk dalam [4].

## 5 Contoh Permukaan PPS-Pasu Berlekuk

Di sini kita akan menunjukkan satu contoh permukaan wajar yang dijana menggunakan kaedah PPS Bloor-Wilson [7]. Permukaan tersebut adalah permukaan bentuk bebas yang dinamakan sebagai pasu berlekuk. Dengan memilih pelbagai syarat sempadan, pasu pelbagai bentuk dapat dijana dengan mudah. Bagi menunjukkannya, pertimbangkan rekabentuk pasu yang mana permukaan atasnya berlekuk dan dasarnya adalah berbentuk bulat. Syarat-syarat sempadan diberikan seperti berikut:

$$\begin{aligned}x(0, v) &= r_1 \cos(v) + r_2 \sin(v) + r_3 \sin(v) \\y(0, v) &= r_1 \sin(v) + r_2 \cos(v) + r_3 \cos(v) \\z(0, v) &= h_0 + h_1 \sin(n_1 v)\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}x(1, v) &= r_4 \cos(v) \\y(1, v) &= r_4 \sin(v) \\z(1, v) &= 0;\end{aligned}\tag{16}$$

dan syarat-syarat terbitannya adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned}x_u(0, v) &= R_1 \cos(v) + R_2 \sin(v) + R_3 \sin(v) \\y_u(0, v) &= R_1 \sin(v) + R_2 \cos(v) + R_3 \cos(v) \\z_u(0, v) &= H_0 + H_1 \sin(n_1 v)\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}x_u(1, v) &= R_4 \cos(v) \\y_u(1, v) &= R_4 \sin(v) \\z_u(1, v) &= 0\end{aligned}\tag{18}$$

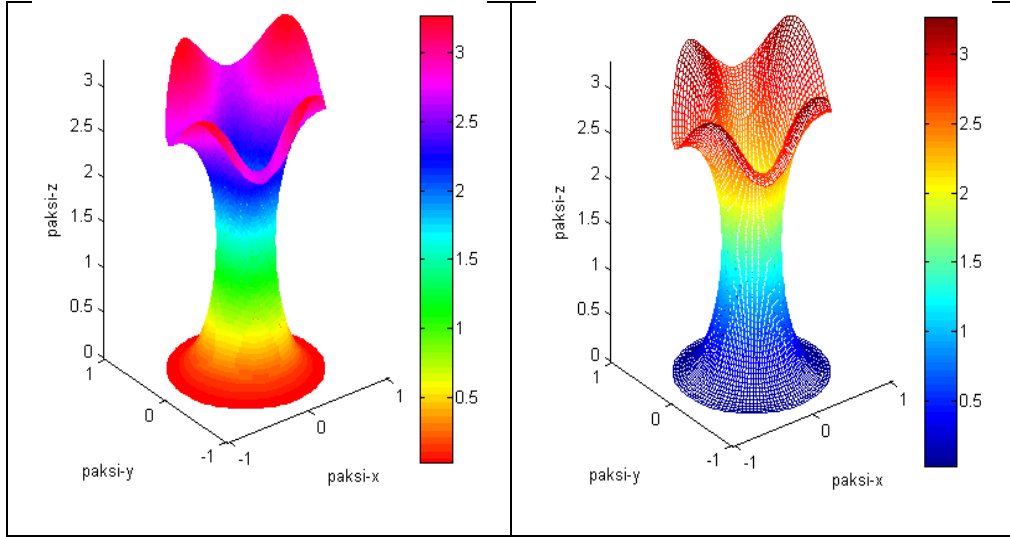
dengan subskrip  $u$  pada  $x$ ,  $y$  dan  $z$  menunjukkan pembezaan separa terhadap  $u$ .

Penyelesaian akhir untuk menjana permukaan pasu yang dikehendaki boleh didapati daripada syarat-syarat sempadan yang dipilih dengan menyatakannya secara analitik seperti berikut:

$$\begin{aligned}X(u, v) &= X_1 \cos(v) + X_2 \sin(v) + X_3 \sin(v) + X_4 \cos(v), \\Y(u, v) &= Y_1 \sin(v) + Y_2 \cos(v) + Y_3 \cos(v) + Y_4 \sin(v), \\Z(u, v) &= Z_0(u) + Z_1 \sin(n_1 v)\end{aligned}\tag{19}$$

dengan  $Z_0(u)$  adalah polinomial dalam bentuk persamaan (8),  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  dan  $Y_4$  adalah setara bentuknya dengan persamaan (9) dan (10) masing-masing manakala  $Z_1$  adalah setara bentuk persamaannya dengan (10). Maka, dapat dilihat di sini bahawa penyelesaian secara analitikal adalah perihai untuk menjana dan memanipulasi permukaan PPS dengan lebih pantas dan efisien lagi. Oleh itu, Rajah 2 menunjukkan beberapa contoh pasu berlekuk yang telah dijana mengikut syarat-syarat yang telah dinyatakan di atas.

Bagi mendapatkan hasil janaan seperti dalam Rajah 2, nilai-nilai set syarat sempadan dan syarat terbitannya adalah seperti berikut iaitu bagi nilai parameter pelicin  $a = 0.01$  dan  $r_1 = 1$ ;  $r_2 = 0.1$ ;  $r_3 = r_2$ ;  $r_4 = 0.8$ ;  $R_1 = -3$ ;  $R_2 = -0.5$ ;  $R_3 = R_2$ ;  $R_4 = 2$ ;  $h_0 = 3$ ;  $h_1 = 0.3$ ;  $H_0 = -0.5$ ;  $H_1 = -0.7$ .



Rajah 2: Penjanaan Permukaan Berparameter - Pasu Berlekuk dengan: (a) ialah janaan *surf* dan *colormap(hsv)* manakala (b) ialah janaan *mesh* dan *colormap(jet)*

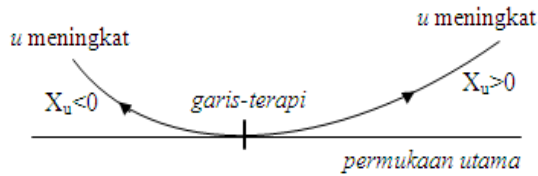
### 5.1 Kesan Perubahan Permukaan Kawalan

Merujuk kepada Bahagian 2, sepertimana yang telah dinyatakan, terdapat tiga sifat yang penting pada suatu permukaan berparameter. Bagi garis sentuh selanjar ia memerlukan  $r_u \times r_v$  selari dengan permukaan normal utama. Di samping itu, dapat dilihat bahawa  $r_v$  ditentukan dengan pemparameteran garis-terapi pada permukaan utama tersebut. Walau bagaimanapun, masih terdapat ruang di mana modifikasi pada permukaan tersebut dapat dilakukan melalui pemilihan  $r_u$  pada sempadannya.

Sebenarnya, arah  $r_u$  menentukan arah penghampiran pada suatu permukaan adunan kepada garis-terapi manakala magnitud  $r_v$  menentukan 'kelajuan' garis-v isoparametri apabila menghampiri garis-terapi tersebut. Maka, dengan merujuk kepada Rajah 3, tanda perubahan  $r_u$  menyatakan bahawa terdapat arah yang berlawanan apabila permukaan itu menghampiri garis-terapi tersebut. Magnitud terbitannya pula menentukan 'kelajuan' permukaan itu menghampiri pada garis-terapi tersebut. Contohnya, [7] menyatakan komponen-z adalah sama bentuknya dengan persamaan (8) iaitu dalam sebutan  $A_0(u)$  dan kita dapati

$$\begin{aligned} A_{x0}(u) &= 0, \\ A_{y0}(u) &= 0, \\ A_{z0}(u) &= h_0 + h'_0 u - (3h_0 + 2h'_0)u^2 + (2h_0 + h'_0)u^3. \end{aligned} \quad (20)$$

Maka dapat dilihat kesan perubahan pada permukaan yang dihasilkan adalah berdasarkan perubahan nilai  $h'_0$  (magnitud terbitan). Jika nilai  $h'_0$  ditingkatkan kepada 10 daripada 0.1, maka permukaan tersebut tentulah terkeluar daripada garis-terapinya dan membentuk suatu bentuk yang lain.



Rajah 3: Arah Penghampiran pada Permukaan Utama

Oleh itu, dengan mengambil kira situasi kecerunan parameter adalah fungsi  $v$  dan dengan menukar syarat terbitan pada  $Z_u$  sebelum ini kepada

$$Z_u = H_0 + H_1 \sin(n_1 v), \tag{21}$$

dengan  $H_0$  dan  $H_1$  adalah pemalar.

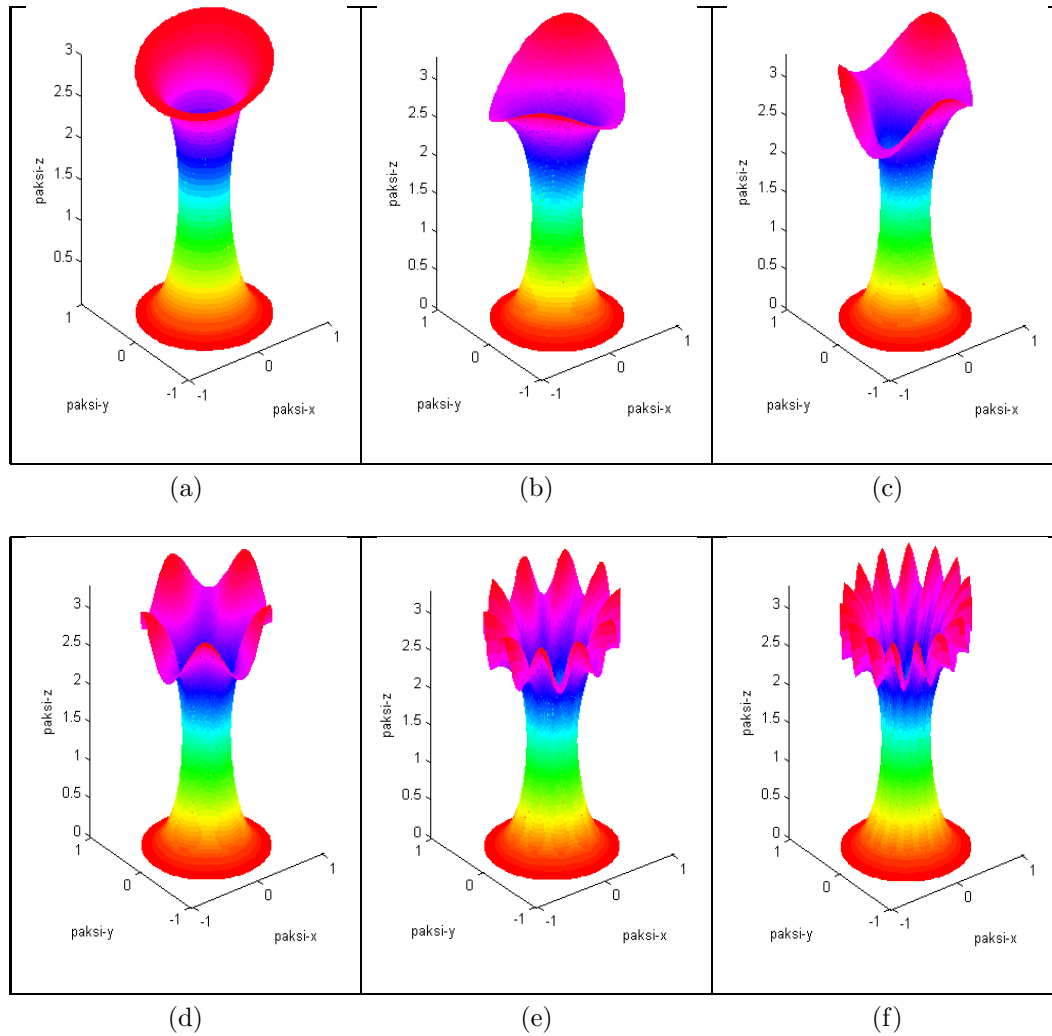
Namun demikian, setelah dibandingkan antara komponen-z oleh [7] dengan komponen-z yang diperkenalkan ini seperti persamaan (21) kita dapati bahawa  $Z_0(u)$  dalam persamaan (19) adalah sama bentuknya dengan persamaan (8) manakala  $Z_1(u)$  juga dalam persamaan (19) adalah serupa bentuknya dengan persamaan (10). Tetapi sedikit perubahan telah dilakukan pada nilai  $v$  pada persamaan (21) di mana kita perkenalkan pekali terhadap  $v$  iaitu  $n_1$ .  $n_1$  ini akan memberi kesan terhadap kalaan  $v$ . Pada kebiasaannya nilai pekali bagi  $v$  adalah satu tetapi sekarang nilainya boleh berubah-ubah mengikut input yang dimasukkan. Hal ini akan menyebabkan rekabentuk pasu akan berubah pada permukaan atasnya yang mana ia akan menjadi berlekuk-lekuk. Pemerhatian terhadap kesan perubahan permukaan kawalan ini dapat diperhatikan dalam Rajah 4. Oleh itu, semakin meningkat nilai  $n_1$  maka lekuk pada permukaan pasu turut bertambah. Ini menjelaskan bahawa nilai  $n_1$  adalah berkadar langsung dengan bentuk pasu yang dijana.

### 5.2 Kesan Perubahan Parameter Pelicin

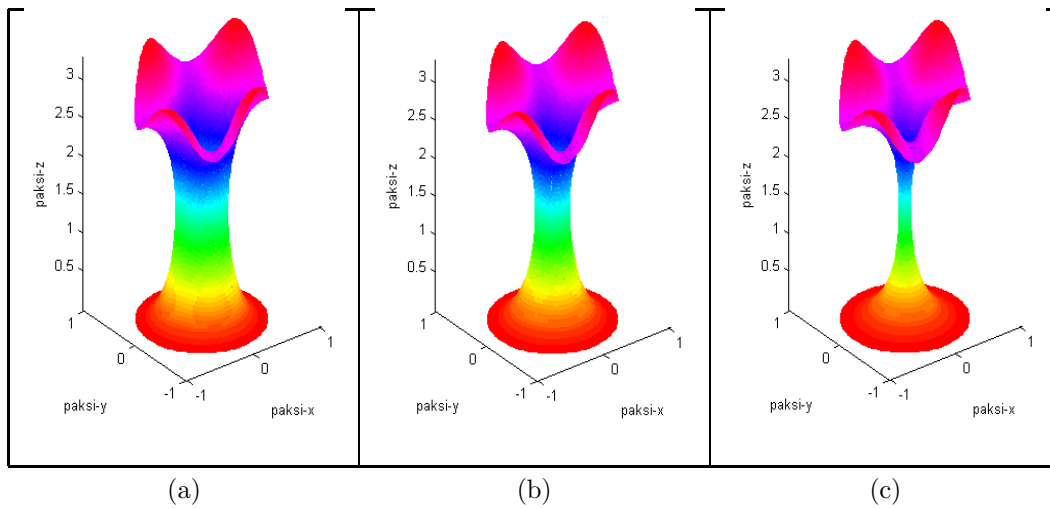
Dalam bahagian ini, kita akan melihat pula pada kesan perubahan terhadap parameter pelicin kepada bentuk permukaan pasu PPS berdarjah empat yang dijana. Parameter pelicin  $a$  dapat mengubah proses pelicinan secara relatif bagi pembolehubah bersandar antara arah  $u$  dan  $v$ . Maka nilai  $a$  tersebut diambil sebagai nilai pemalar dan nilainya tidak boleh sifar. Beberapa kesan perubahan pada nilai  $a$  ditunjukkan pada Rajah 5. Oleh itu, jelas diketahui bahawa perubahan pada nilai parameter pelicin juga memberi kesan yang besar terhadap sesuatu permukaan yang dijana. Secara umumnya, jika kita memilih nilai  $a$  semakin membesar, maka bahagian tengah yang terbentuk akan semakin mengecil dan begitulah sebaliknya.

## 6 Kesimpulan

Dalam kertas kerja ini, kita telah membincangkan tentang penjanaan permukaan berparameter menggunakan kaedah PPS. Rekabentuk contoh yang ditunjukkan di sini adalah



Rajah 4: Pasu Berlekuk dengan kesan perubahan pada nilai pekali  $v$  iaitu  $n_1$ . (a) menunjukkan  $n_1 = 1$ , (b) menunjukkan  $n_1 = 2$ , (c) menunjukkan  $n_1 = 3$ , (d) menunjukkan  $n_1 = 5$ , (e) menunjukkan  $n_1 = 10$ , (f) menunjukkan  $n_1 = 15$ .



Rajah 5: Kesan Perubahan Parameter Pelicin  $a$  terhadap Permukaan Berparameter dengan nilai pada: (a)  $a = 1$ , (b)  $a = 6$  dan (c)  $a = 9$

pasu berlekuk. Ini kerana pasu adalah salah satu daripada kelas permukaan bentuk bebas yang istimewa. Walau bagaimanapun, nilai yang penting pada elemen estetik sesebuah pasu itu adalah pada perbezaan hiasannya seperti mempunyai lekuk di bahagian atas permukaannya (Rajah 2). Aspek yang paling penting dalam suatu janaan permukaan PPS adalah berdasarkan kepada pemilihan syarat-syarat sempadannya. Ini kerana pemilihan syarat-syarat sempadan yang sesuai dan betul akan dapat menghasilkan rekabentuk pasu yang dikehendaki dan juga dengan mengambil kira faktor-faktor kesan perubahan pada permukaan geometri tersebut.

Namun demikian, dapat dilihat bahawa pasu berlekuk yang telah dijana adalah menggunakan persamaan *biharmonic* berdarjah empat melalui kaedah penyelesaian PPS Bloor-Wilson. Maka dengan kehadiran fungsi sinus pada komponen-z pada syarat terbitannya, suatu bentuk permukaan baru dapat dihasilkan. Secara ringkasnya, rekabentuk pasu di bahagian tengah adalah dikawal oleh parameter pelicin manakala di bahagian atas dan bawah adalah dipengaruhi oleh syarat pada garis sentuhnya.

Oleh itu, terdapat pelbagai aplikasi dalam bidang komputer grafik dan rekabentuk geometri berbantu komputer (RGBK) yang dapat dilakukan dengan menggunakan kaedah PPS Bloor-Wilson ini. Antaranya adalah penjanaan permukaan adunan berdarjah tinggi, penjanaan permukaan licin dan sebagainya.

## Penghargaan

Penulis mengucapkan setinggi-tinggi terima kasih kepada Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia dalam menyokong terhadap kerja yang telah dilakukan ini di bawah geran akaun jangkamasa pendek yang bernombor 304/PMATHS/637057.

## Rujukan

- [1] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Generating Blend Surfaces using Partial Differential Equation*, *Compt. Aided Design*, 21(1989), 165-171.
- [2] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Representing PDE Surfaces in terms of B-Splines*, *Compt. Aided Design*. 22(1990), 324-331.
- [3] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Using Partial Differential Equations to Generate Free-form Surfaces*, *Compt. Aided Design*. 22(1990), 200-212.
- [4] M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Spectral Approximations to PDE Surfaces*, *Compt. Aided Design*. 28(1996), 145-152.
- [5] H. Du & H. Qin, *A Shape Design System using Volumetric Implicit PDEs*, *Compt. Aided Des.* 36(2004), 1101-1116.
- [6] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, 4<sup>th</sup> Edition, Academic Press, NY, 1996.
- [7] N.B. Ismail & J.M. Ali, *Generating the Shapes of Jars using Partial Differential Equations*, *MATEMATIKA*, 20(2004), 133-140.
- [8] J. Monterde & H. Ugail, *A General Fourth-order PDE Method to Generate Bezier Surface from the Boundary*, *Compt. Aided Geometric Design*, 23(2006), 208-225.
- [9] H. Nowacki, M.I.G. Bloor & B. Oleksiewicz, *Computational Geometry for Ships*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 1995.
- [10] Z.R. Yahya & J.M. Ali, *Rekabentuk bagi Penjanaan Pasu menggunakan Persamaan Pembezaan Separa*, *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-XV*, 2007.
- [11] H. Ugail, M.I.G. Bloor & M.J. Wilson, *Techniques for Interactive Design using the PDE Method*, *ACM Trans. On Graph. Des.* 18(1999), 195-212.
- [12] J.J. Zhang & L. You, *PDE Based Surface Representation - Vase Design*, *Compt. Graph.* 26(2002), 89-98.